Bài 2: Thuật giải Kruskal tìm cây bao trùm tối thiểu của đồ thị.

1. **Ý tưởng phương pháp.**

Giả sử cần tìm cây bao trùm nhỏ nhất của đồ thị G=(E, V).

Trong đó: E là tập các cạnh, V là tập các đỉnh của đồ thị G.

* Khởi tạo rừng F (tập hợp các cây) trong đó mỗi đỉnh của G tạo thành 1 cây riêng biệt.
* Các cạnh được sắp xếp theo thứ tự tăng dần của trọng số.
* Thêm vào cạnh có trọng số nhỏ nhất trong các cạnh chưa thêm vào cây và không tạo thành chu trình với các cạnh đã được chọn trước đó.
* Lặp lại việc chọn cho đến khi có (n - 1) cung. (n: số đỉnh).

1. **Lược đồ thuật toán**

Procedure Kruskal

Begin

T := ∅; // T là cây bao trùm nhỏ nhất

F := E; // F là tập các cạnh đã chọn tại thời điểm bất kì

E là tập các cạnh của đồ thị G=(E, V)

while (|T| < n-1) and (F ≠ ∅) do

begin

chọn cạnh e có trọng số bé nhất trong F;

F := F \ {e};

if T ∪ {e} không chứa chu trình then

T := T ∪ {e} // ghép e vào cây

end;

if (|T|<n-1) then write(“đồ thị không liên thông”);

end;

1. **Thời gian thực hiện.**

Nếu E là số cạnh và V là số đỉnh thì thời gian chạy là O(E log V).

Theo phương pháp trên: sắp xếp tất cả các cạnh theo thứ tự tăng dần trọng số trong thời gian O(E log E). Ta cần thực hiện O(E) thao tác gồm thao tác tìm và thêm cạnh có trọng số nhỏ nhất trong số các cạnh còn lại của đồ thị.

Vì vậy tổng thời gian là O(E log E) = O(E log V).

1. **Chứng minh tính đúng đắn.**

Gồm 2 phần: chứng minh kết quả thuật toán là một cây bao trùm và cây bao trùm đó là nhỏ nhất.

* Cây bao trùm.

F luôn là một rừng do việc nối hai cây bằng 1 cạnh luôn tạo ra một cây mới.

Giả sử F gồm ít nhất 2 cây A và B. Khi cạnh đầu tiên nối các đỉnh trong A của F với phần còn lại của đồ thị đang xét thì hiển nhiên sẽ chọn cạnh đó. Vì A không thể là một cây trong F khi thuật toán kết thúc nên F liên thông và là một cây bao trùm.

* Cây bao trùm nhỏ nhất.

Ta chứng minh mệnh đề P: nếu F là tập hợp các cạnh đã chọn tại bất kỳ thời điểm nào trong quá trình thực hiện thuật toán thì tồn tại cây bao trùm nhỏ nhất chứa F.

Chứng minh bằng quy nạp.

* Hiển nhiên mệnh đề P đúng khi thuật toán bắt đầu vì F là rỗng.
* Giả sử P đúng cho một tập hợp F và giả sử T là cây bao trùm nhỏ nhất chứa F. Nếu cạnh được thêm vào tiếp theo là e cũng nằm trong T thì P đúng cho F+{e}. Nếu không thì T+{e} chứa chu trình và tồn tại cạnh f nằm trên chu trình đó nhưng không trong F. Nếu không có cạnh f thì không thể thêm e vào F bởi vì sẽ tạo ra chu trình. Do đó T – {f} + {e} là một cây và nó cùng trọng số với T, do T có trọng số nhỏ nhất và F không thể nhỏ hơn e, vì nếu không thuật toán đã chọn f trước e. Vì vậy T – {f} + {e} là một cây bao trùm nhỏ nhất chứa F + {e} và mệnh đề P đúng.

Vậy P đúng khi thuật toán kết thúc và F là một cây bao trùm, điều này chỉ có thể xảy ra khi F là một cây bao trùm nhỏ nhất.